

$p \wedge q, r \vdash q \wedge r$

1	$p \wedge q$	premise
2	r	premise
3	q	$\wedge e_2$ 1
4	$q \wedge r$	$\wedge i$ 3, 2

$$(p \wedge q) \wedge r \vdash p \wedge (q \wedge r)$$

$$1 \quad (p \wedge q) \wedge r \quad \text{premise}$$

$$2 \quad p \wedge q \quad \wedge e_1 \ 1$$

$$3 \quad r \quad \wedge e_2 \ 1$$

$$4 \quad p \quad \wedge e_1 \ 2$$

$$5 \quad q \quad \wedge e_2 \ 2$$

$$6 \quad q \wedge r \quad \wedge i \ 5, 3$$

$$7 \quad p \wedge (q \wedge r) \quad \wedge i \ 4, 6$$

$p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$

1	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premise
		- -
2	p	
		- -
3	$\neg r$	
4	$q \rightarrow r$	$\rightarrow e$ 2, 1
5	$\neg q$	MT 4, 3

$$\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$$

1 $\neg q \rightarrow \neg p$ premise

2

p

assumption

3

$\neg\neg p$

$\neg\neg i$ 2

4

$\neg\neg q$

MT 1, 3

5

$p \rightarrow \neg\neg q$ $\rightarrow i$ 2-4

$$(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

1 $(p \wedge q) \rightarrow r$ premise

2 p assumption

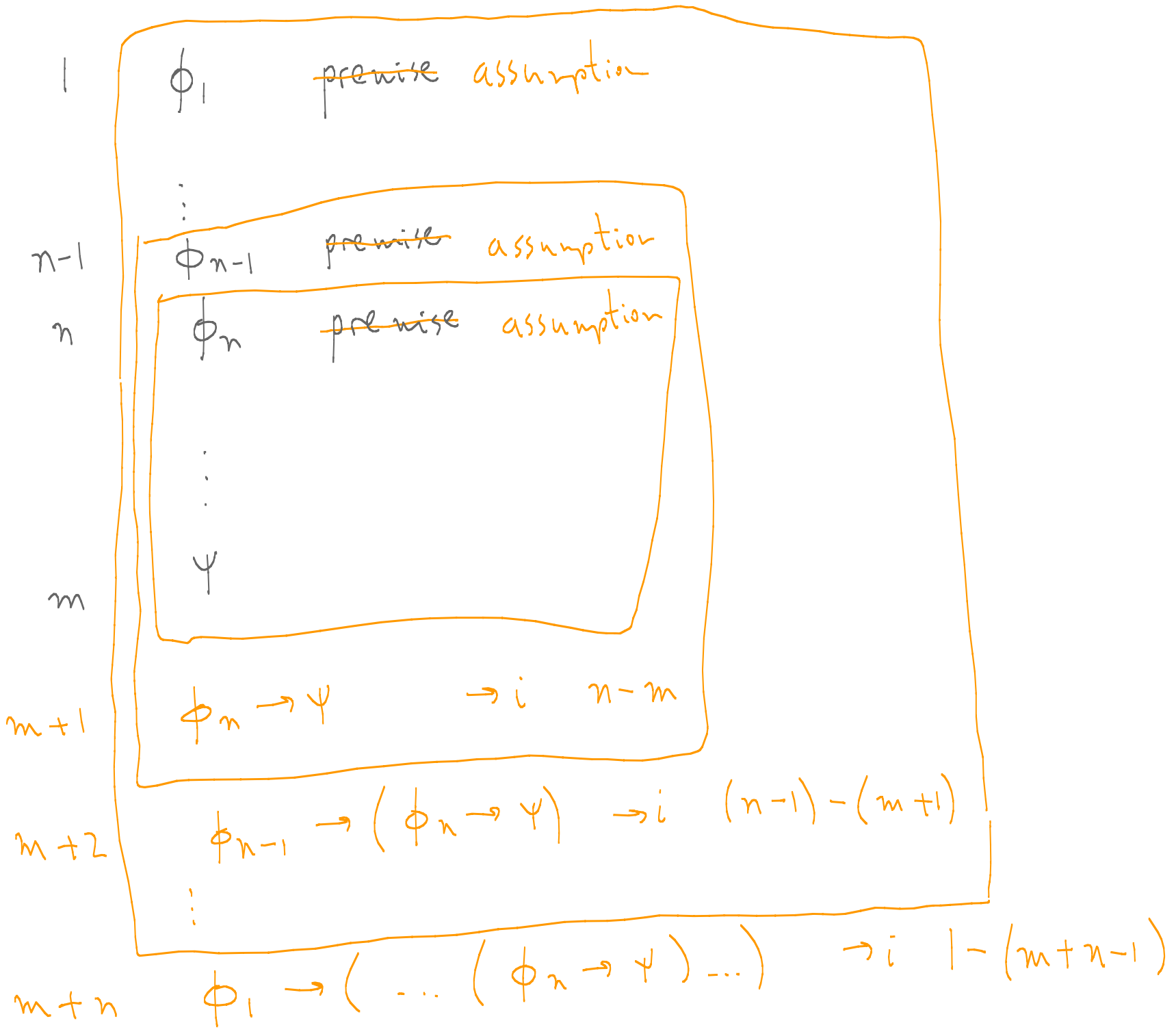
3 q assumption

4 $p \wedge q$ $\wedge i$ 2, 3

5 r $\rightarrow e$ 4, 1

6 $q \rightarrow r$ $\rightarrow i$ 3-5

7 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ $\rightarrow i$ 2-6



1 $p \wedge (q \vee r)$ premise

2 p $\wedge e_1$ 1

3 $q \vee r$ $\wedge e_2$ 1

4 q assumption

5 $p \wedge q$ $\wedge i$ 2, 4

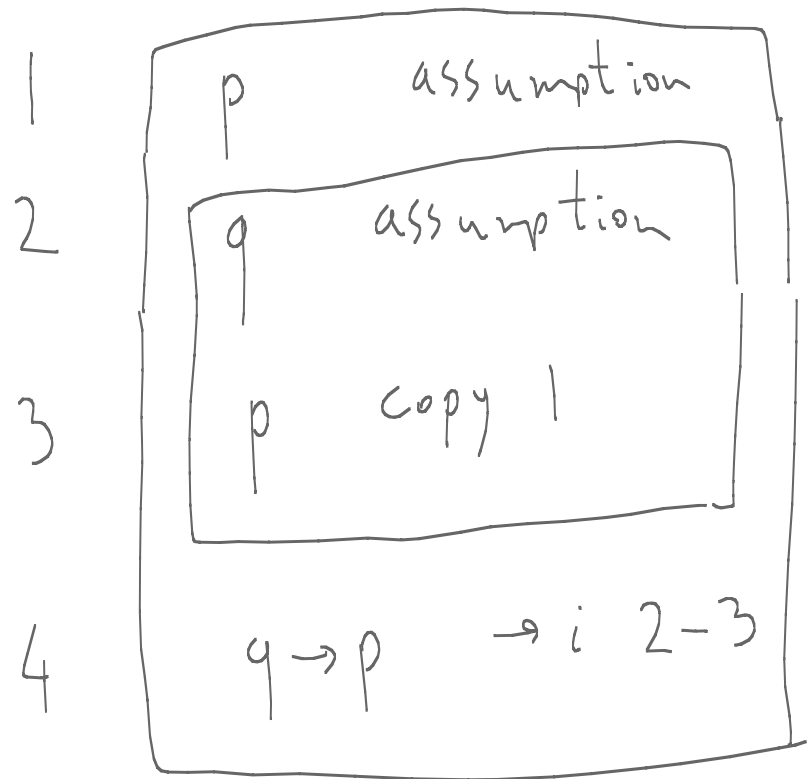
6 $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $\vee i_1$ 5

7 r assumption

8 $p \wedge r$ $\wedge i$ 2, 7

9 $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $\vee i_2$ 8

10 $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $\vee e$ 3, 4-6, 7-9



5 $p \rightarrow (q \rightarrow p) \rightarrow i 1-4$

1 $p \rightarrow q$ premise

2 $r \rightarrow s$ premise

3 $p \vee r$ assumption

4 p assumption

5 $q \rightarrow e$ 4, 1

6 $q \vee s$ $\vee i$, 5

7 r assumption

8 $s \rightarrow e$ 7, 2

9 $q \vee s$ $\vee i$, 8

10 $q \vee s$ $\vee e$ 3, 4-6, 7-9

11 $(p \vee r) \rightarrow (q \vee s) \rightarrow i$ 3-10

1 $\neg p \vee q$ premise

2	p	assumption
3	$\neg p$	assumption
4	\perp	$\neg e$ 2,3
5	q	$\perp e$ 4
6	q	assumption
7	q	copy 6
8	q	$\vee e$ 1, 3-5, 6-7

9 $p \rightarrow q \rightarrow i$ 2-8

1 $p \rightarrow \neg p$ premise

2	p	assumption
3	$\neg p$	$\rightarrow e$ 2,1
4	\perp	$\neg e$ 2,3

5 $\neg p$ $\neg i$ 2-4

1 $p \wedge \neg q \rightarrow r$ premise

2 $\neg r$ -1-

3 p -11-

4 $\neg q$ assumption

5 $p \wedge \neg q$ $\wedge i$ 3,4

6 r $\rightarrow e$ 5,1

7 \perp $\neg e$ 6,2

8 $\neg \neg q$ $\neg i$ 4-7

9 q $\neg e$ 8

- 1 $\neg(\phi \vee \neg \phi)$ assumption
- 2 ϕ assumption
- 3 $\phi \vee \neg \phi$ $\vee i, 2$
- 4 \perp $\neg e 3,1$
- 5 $\neg \phi$ $\neg i 2-4$
- 6 $\phi \vee \neg \phi$ $\vee i_2 5$
- 7 \perp $\neg e 6,1$
- 8 $\phi \vee \neg \phi$ RAA 1-7

1 $p \rightarrow q$ premise

2 $p \vee \neg p$ LEM

3 p assumption

4 q $\rightarrow e$ 3, 1

5 $\neg p \vee q$ $\vee i_2$ 4

6 $\neg p$ assumption

7 $\neg p \vee q$ $\vee i_1$ 6

8 $\neg p \vee q$ $\vee e$ 2, 3-5, 6-7